Анализ типичных ошибок по математике участников ЕГЭ 2019 года

г. Ростов-на-Дону

Каждый вариант ЕГЭ по математике **базового** уровня в 2019 году содержал 20 заданий с кратким ответом. Проверяя достижение требований стандарта, КИМ ЕГЭ по математике базового уровня имеют выраженную практическую направленность и включают в себя задания из всех разделов школьного курса математики.

Задания практико-ориентированного характера составляют основу экзамена и охватывают широкий круг объектов и практических сюжетов: оптимальный выбор, финансовая грамотность, чтение графиков, бытовые расчеты, оперирование процентами, прикладная геометрия, оценка вероятностей событий в простых ситуациях, оценка и прикидка.

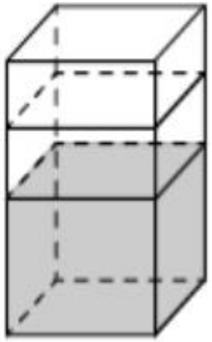
Динамика результатов ЕГЭ по математике за последние 3 года

	Субъект РФ		
	2017 г.	2018 г.	2019 г.
Базовая математика			
Не преодолели минимального балла	321	233	195
Средний тестовый балл	4,26	4,32	4,05

Анализ результатов выполнения отдельных заданий по математике (базовый уровень) за период 2016-2019 г.г., с учетом ввода цветовой шкалы, %

Номер задания	**2016**	**2017**	**2018**	**2019**
1	93,36	84,87	92,6	88,09
2	79,59	87,25	88,71	82,64
3	84,15	85,32	92,36	79,79
4	78,62	86,33	78,8	87,39
5	87,11	80,3	92,85	80,78
6	91,72	88,86	86,49	60,50
7	76,99	84,18	84,06	83,31
8	78,96	79,03	87,53	77,91
9	94,15	93,13	89,76	96,49
10	88,05	79,37	86,12	80,24
11	97,09	96,78	96,83	89,86
12	74,05	88,43	89,29	90,89
13	60,85	54,55	49,97	28,41
14	91,84	94,18	72,84	87,01
15	56,74	66,81	71,35	55,00
16	65,59	71,3	77,85	31,35
17	45,1	65,23	44,65	66,77
18	71,27	81,81	78,11	70,99
19	20,75	38,8	66,42	66,41
20	23,16	17,64	18,7	13,61

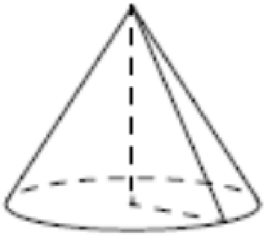
Задание 13.



В бак, имеющий форму правильной четырёхугольной призмы, налито 10 л воды. После полного погружения в воду детали уровень воды в баке увеличился в 1,6 раза. Найдите объём детали. Ответ дайте в кубических сантиметрах, зная, что в одном литре 1000 кубических сантиметров.

Задание 16.

Объём конуса равен 24π, а радиус его основания равен 2. Найдите высоту конуса.



Задание 20.

В доме всего десять квартир с номерами от 1 до 10. В каждой квартире живёт не менее одного и не более трёх человек. В квартирах с 1-й по 8-ю включительно живёт суммарно 10 человек, а в квартирах с 7-й по 10-ю включительно живёт суммарно 10 человек. Сколько всего человек живёт в этом доме?

- !!!
- Самые низкие показатели дали задания №13, №16, №20, два задания, как видно , по геометрии.
- Необходимо менять методы и подходы преподавания школьной геометрии, а так же УМК и различные ресурсы

КИМ ЕГЭ по математике **профильного** уровня в 2019 г. по сравнению с 2015-2018 г.г. не претерпели изменений в содержательном плане.

В отдельных заданиях второй части были сделаны незначительные изменения сложности для улучшения соответствия общей трудности КИМ целевой группе участников профильного экзамена.

Был несколько расширен круг сюжетов задания 17, незначительно упрощены геометрические конструкции в задании 14 и изменены подходы к разработке заданий 15 (неравенство) с целью исключения искуственных выражений с логарифмами по переменному основанию.

Часть 1 содержала 8 заданий (1–8) с кратким числовым ответом, проверяющих наличие практических математических знаний и умений базового уровня.

Часть 2 содержала 11 заданий по материалу курса математики средней школы, проверяющих уровень профильной математической подготовки:

четыре задания (9–12) с кратким ответом

семь заданий (13–19) с развернутым ответом.

Задания делились на три тематических модуля: «Алгебра и начала математического анализа», «Геометрия» и «Практико-ориентированные задания».

Задания 1, 2, 4 первой части и задания 10 и 17 второй части представляли практико-ориентированный модуль, включая задание по теории вероятностей.

Задания 3, 6, 8 первой части, задания 14, 16 второй части геометрические.

Задания 5, 7 первой части и задания 9, 11, 12, 13, 15, 18 и 19 второй части – это задания разного уровня сложности по алгебре и началам математического анализа, включая задания на составление математических моделей в виде уравнений или неравенств, а также задания по элементам математического анализа, призванные проверить базовые понятия математического анализа и умение применять стандартные алгоритмы при решении задач.

Динамика результатов ЕГЭ по математике за последние 3 года

	Субъект РФ		
	2017 г.	2018 г.	2019 г.
Профильная математика			
Не преодолели минимального балла	2045	1317	225
Средний тестовый балл	43,23	45,29	55,34
Получили от 81 до 99 баллов	192	77	467
Получили 100 баллов	1	0	8

Анализ результатов выполнения отдельных заданий по математике (профильный) за период 2016-2019 г.г., с учетом ввода цветовой шкалы, %

	2016	2017	2018	2019
1	94,06	92,55	87,98	96,82
2	96,71	91,16	93,74	92,94
3	88,81	75,74	90,63	95,96
4	73,44	91,68	90,41	94,47
5	89,45	86,48	86,68	94,55
6	76,45	72,79	70,46	72,27
7	65,13	53,38	32,91	72,50
8	40,84	50,95	43,43	73,39
9	55,08	30,50	92,22	79,76
10	24,80	61,18	63,40	80,88
11	36,90	42,81	52,72	71,89
12	39,83	36,22	35,45	48,71
13	32,32	33,28	26,22	37,41
14	3,74	3,29	10,03	5,25
15	9,90	15,08	8,31	16,41
16	1,65	4,33	1,32	1,33
17	8,74	12,48	1,88	14,23
18	2,47	1,04	0,72	1,42
19	31,80	8,32	2,95	2,89

Задание 1. В летнем лагере 235 детей и 26 воспитателей. Автобус рассчитан не более чем на 45 пассажиров. Какое наименьшее количество автобусов понадобится, чтобы за один раз перевезти всех из лагеря в город?

Средний процент выполнения - **97,7%**

Уровень -базовый

Проверяемые умения и навыки: использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни

Основные ошибки – неумение читать условие задачи, невнимательность, вычислительные ошибки.

Результаты выполнения задания 1 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	66,67	99,08	100

Задание 2. На рисунке жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в Ижевске с 14 по 27 сентября 1980 года. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки на рисунке соединены линией. Определите по рисунку, какого числа из данного периода среднесуточная температура в Ижевске была наибольшей.

Средний процент выполнения - 98,4%

Уровень -базовый

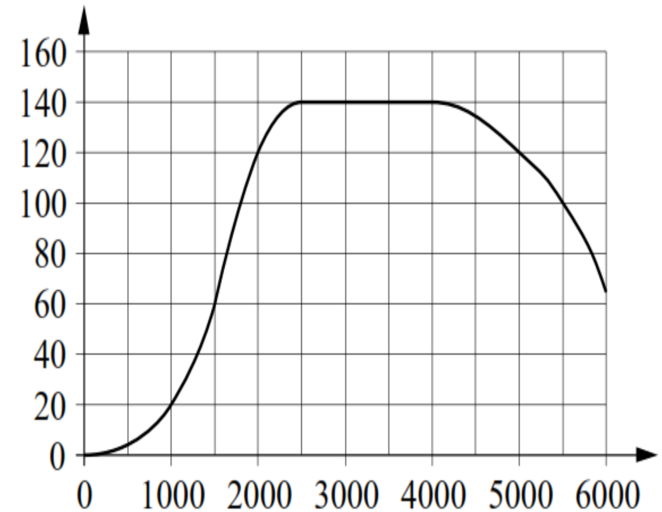
Проверяемые умения и навыки: использование приобретенных знаний и умений в практической деятельности и повседневной жизни

Основные ошибки – не смогли извлечь необходимую информацию из предложенной диаграммы, а значит, невнимательно прочитали текст задания и не сумели дать правильный ответ на поставленный вопрос.

Результаты выполнения задания 2 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	83,33	99,08	100

Задание 2 На графике изображена зависимость крутящего момента двигателя от числа его оборотов в минуту. На горизонтальной оси отмечено число оборотов в минуту, на вертикальной оси — крутящий момент в Н · м. Определите по графику крутящий момент, если двигатель совершал 5000 оборотов в минуту. Ответ дайте в Н · м



Выполнение этого задания – около 94%. Нетипичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия и пониманием единиц измерения; например, несколько участников экзамена, выполнявших это задание, посчитали, что « Н · м » означает, что крутящий момент нужно умножить на число оборотов двигателя.

Задание 3. На клетчатой бумаге с размером клетки 1x1 изображён треугольник. Найдите его площадь.

Средний процент выполнения - 97,3%

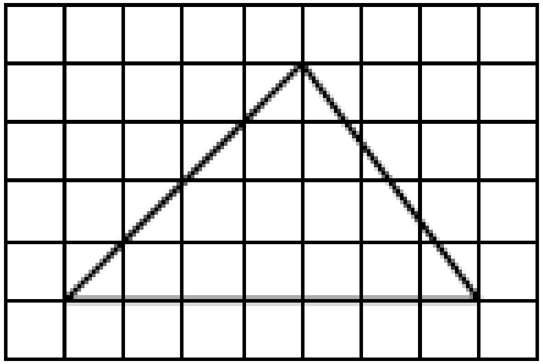
Уровень -базовый.

Проверяемые умения и навыки: умение решать элементарные планиметрические задачи на нахождение площади треугольника.

Основные ошибки – невнимательность при чтении условия задачи, вычислительные ошибки, ошибки при записи ответа.

Результаты выполнения задания 3 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	50,0	97,47	100



Задание 4. В сборнике билетов по философии всего 35 билетов, в четырнадцати из них встречается вопрос по теме «Метафизика». Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете студенту достанется вопрос по теме «Метафизика»..

Средний процент выполнения - 98,6%

Уровень -базовый.

Проверяемые умения и навыки: умение понять смысл задания, умение разобраться в ситуации, умение извлекать нужную информацию из формулировки задания. Умение находить вероятность наступления события.

Основные ошибки –невнимательность при чтении условия задачи, неумение работать с дробными числами, незнание формулы классической вероятности, неверная запись полученного ответа в бланк.

Результаты выполнения задания 4 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	100	99,39	100

Задание 4 В среднем из 2000 садовых насосов, поступивших в продажу, 12 подтекают. Найдите вероятность того, что один случайно выбранный для контроля насос **не** подтекает.

Выполнение этого задания – около 90%.

Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия: около 2,5% нашли вероятность выбора подтекающего насоса, не обратив внимания на частицу «не» в условии.

Задание 5. Найдите корень уравнения.

Средний процент выполнения - 97,59%

Уровень -базовый.

Проверяемые умения и навыки: умение решать простейшие логарифмические, показательные, степенные, дробно-рациональные или иррациональные уравнения.

Основные ошибки – часть ошибочных ответов была обусловлена арифметическими ошибками в решении линейных уравнений.

Результаты выполнения задания 5 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	50,0	99,07	100

5 Найдите корень уравнения $7^{x-9}=\frac{1}{49}$.

Ответ: ___________________________.

Выполнение этого задания – около 87%.

Почти 2% участников ошиблись в свойствах степеней.

Задание 6. В четырёхугольник ABCD вписана окружность, AB=8, BC=10 и CD=37. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

Средний процент выполнения - 71,79%

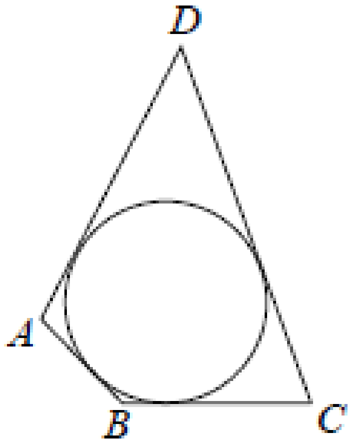
Уровень -базовый.

Проверяемые умения и навыки: умение решать простейшие задачи на нахождение различных элементов и величин в геометрических фигурах.

Основные ошибки – плохое знание простейших геометрических фактов. Ошибки допустили те участники экзамена, которые слабо владеют геометрическим материалом..

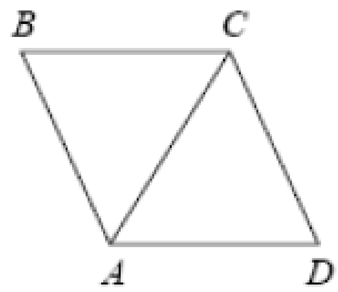
Результаты выполнения задания 6 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	91,1	97,8



Задание 6.

В ромбе $ABCD$ угол CDA равен $78°$. Найдите угол ACB. Ответ дайте в градусах.



Комментарий. Неверный ответ 78 мог быть спровоцирован опорой на рисунок, где треугольник ACD внешне похож на равносторонний. Ответ 102 получается, если искать угол BCD или забыть разделить его пополам.

Рекомендации. Многие школьники за годы изучения геометрии не выработали верного отношения к геометрическому рисунку как изображению взаимного расположения элементов, но относятся к нему как к чертежу, где соблюдены все размеры. Задача учителя – разъяснить роль рисунка в задаче. При подготовке можно использовать методический прием – просить перерисовать рисунок, но исказить его при этом, изменив длины и углы.

Исключить ошибку, связанную с невнимательностью (ответ 102), труднее всего. Эту ошибку может допустить самый подготовленный и сильный школьник, и даже профессиональный математик. Такие ошибки выявляются только при перепроверке. Рекомендуем обращать внимание школьников на важность проверки своих ответов. К этому следует отнестись как к обязательной части выполнения любого задания.

Задание 7. На рисунке изображены график функции y=f(x) и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции y=f(x) в точке x_0.

Средний процент выполнения – 74,7%

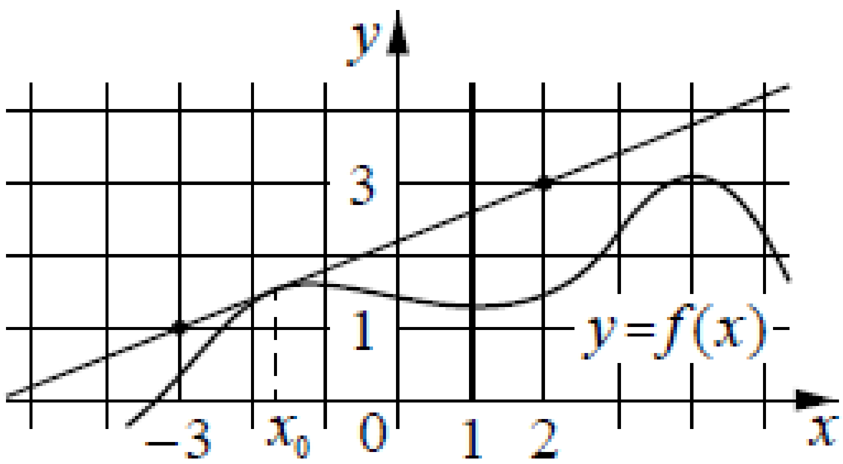
Уровень -базовый.

Проверяемые умения и навыки: умение выполнять действия с функциями и их производными: умение определять свойства функции по графику ее производной.

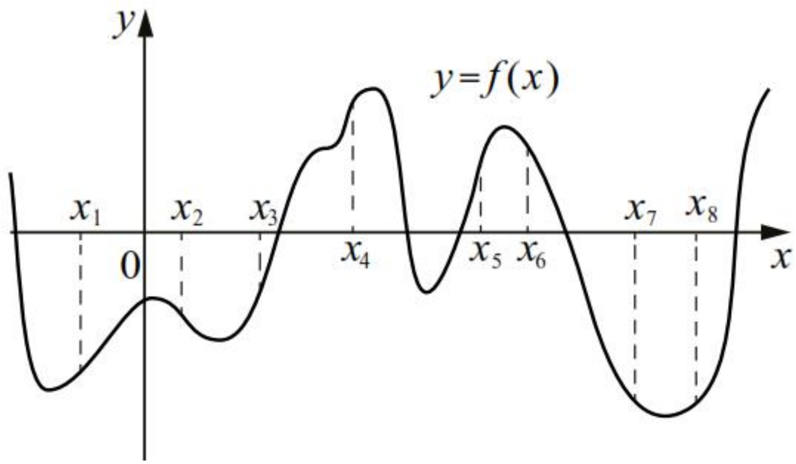
Основные ошибки – незнание и непонимание геометрического смысла производной.

Результаты выполнения задания 7 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	91,7	100



Задание 7. На рисунке изображен график функции $y = f(x)$. На оси абсцисс отмечено восемь точек: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8. В ответе укажите количество точек (из отмеченных), в которых производная функции $f(x)$ положительна.



Выполнение этого задания – около 33%.

Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия: почти 24% участников указали количество точек, в которых значение функции положительно, а еще около 2% участников пытались перечислить номера точек, в которых производная принимает положительные значения.

Задание 8. Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 5 раз, а высота останется прежней?

Средний процент выполнения – 76,0%

Уровень -базовый.

Проверяемые умения и навыки: умение решать простейшие стереометрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов). Умение использовать при решении стереометрических задач методы и факты планиметрии..

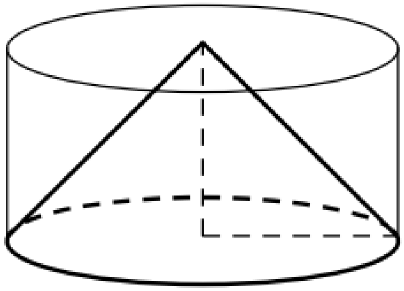
Основные ошибки – незнание формул и основных геометрических фактов по планиметрии и стереометрии.

Результаты выполнения задания 8 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	95,4	100

Низкий процент выполнения заданий по стереометрии вызван существенными проблемами в преподавании стереометрии, формальным характером уроков, уклоном в вычислительные задачи, а в некоторых школах – существенному перекосу в сторону алгебры и начал анализа. Следует подчеркнуть важность геометрических знаний для дальнейшего успешного обучения в инженерных вузах. В преподавании геометрии важным является умение не только решать по готовым формулам вычислительные задачи с геометрическим содержанием, но и формировать геометрические представления о фигурах.

Задание 8. Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Высота цилиндра равна радиусу основания. Площадь боковой поверхности конуса равна $3\sqrt{2}$. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.



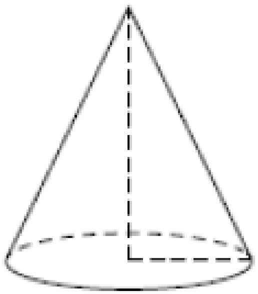
2018 год

Выполнение этого задания – около 43%.

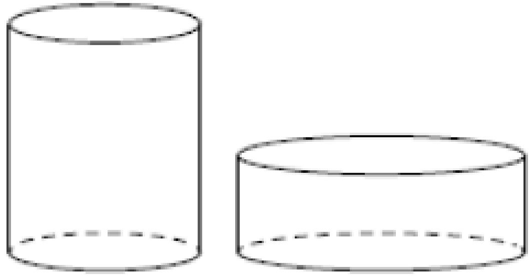
Около 8% не дали никакого ответа. Почти 38% участников ошиблись в формуле площади боковой поверхности конуса, при этом почти 12% ошибочно использовали числовой коэффициент из формулы объема конуса.

Задание 8.

Во сколько раз увеличится объём конуса, если радиус его основания увеличится в 5 раз, а высота останется прежней?



Дано два цилиндра. Объём первого цилиндра равен 16. У второго цилиндра высота в 4 раза меньше, а радиус основания в 3 раза больше, чем у первого. Найдите объём второго цилиндра.



Комментарий. Ответ 5 в первой и 12 во второй задаче – типичные неверные ответы. Эта ошибка возникает тогда, когда школьник вместо формулы объема опирается на наглядные представления, но не обладает достаточным уровнем математической культуры для того, чтобы твердо понимать, что площадь основания увеличивается пропорционально квадрату увеличения радиуса.

Рекомендация. Относительно слабым школьникам, предпочитающим наглядный метод решения таких, задач следует настоятельно советовать решать задачу двумя способами – наглядным с последующей проверкой по формуле, добиваясь совпадения результатов при двух методах решения. С другой стороны, мы не рекомендуем пользоваться решением только по формуле, поскольку это вызывает множество других ошибок и не приводит к повышению надежности решения задачи.

Задание 9. Найдите значение выражения.

Средний процент выполнения – 88,9%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки: умение проводить по известным формулам и правилам преобразование буквенных и числовых выражений, содержащих степени, радикалы, логарифмы и тригонометрические функции

Основные ошибки – незнание или недостаточное знание свойств степенных выражений, отсутствие практических навыков работы с такими выражениями.

Результаты выполнения задания 9 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	16,7	97,8	100

9

Найдите значение выражения $\dfrac{\log_5 23}{\log_{125} 23}$.

Ответ: ______________________.

Задание 9. Найдите значение выражения $\sqrt{2}\sin\frac{7\pi}{8}\cdot\cos\frac{7\pi}{8}$

2018 год

Выполнение этого задания – около 92%. Не дали ответа 9% участников экзамена, выполнявших это задание.

Типичные ошибки связаны в первую очередь с определением знака тригонометрической функции: почти 12% участников потеряли знак минус, еще 22% решили, что ожидается ответ 1 или 2.

Задание 10. Коэффициент полезного действия (КПД) некоторого двигателя определяется формулой ((T1-T2)/T1)*100% , где T1 — температура нагревателя (в кельвинах), T2— температура холодильника (в кельвинах). При какой температуре нагревателя T1 КПД этого двигателя будет 15%, если температура холодильника T2= 340K? Ответ дайте в кельвинах.

Средний процент выполнения – 83,3%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки: умение использовать приобретенные знания и умения в практической деятельности и повседневной жизни. Умение описывать с помощью функций различные зависимости между величинами и интерпретировать их графики. Умение извлекать нужную информацию из текста. Решать прикладные задачи социально-экономического и физического характера.

Основные ошибки – недостаточно сформировано умение строить и исследовать математические модели.

Результаты выполнения задания 10 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	97,8	100

Задание 10. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с фокусным расстоянием $f = 36$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 см до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 160 см до 180 см. Изображение на экране будет четким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

На каком наименьшем расстоянии от линзы нужно поместить лампочку, чтобы ее изображение на экране было четким? Ответ дайте в сантиметрах.

(2018 год) *Выполнение этого задания – около 63%. Не дали ответа 8% участников экзамена, выполнявших это задание.*

Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия или с непониманием текста: почти 6% участников решили, что чем ближе, тем лучше; еще 4% решили, что нужно лампочку поместить в середину разрешенного интервала, а еще около 4,5% участников решили, что самый главный параметр – это фокус.

Задание 11. Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 84 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из А в В. Ответ дайте в км/ч.

Средний процент выполнения – 75,0%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки: умение моделировать и исследовать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи. Умение решать простейшие алгебраические уравнения и неравенства.

Основные ошибки – недостаточно сформировано умение строить и исследовать математические модели.

Результаты выполнения задания 11 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	97,1	100

Задание 11. Теплоход, скорость которого в неподвижной воде равна 27 км/ч, проходит некоторое расстояние по реке и после стоянки возвращается в исходный пункт. Скорость течения равна 1 км/ч, стоянка длится 5 часов, а в исходный пункт теплоход возвращается через 32 часа после отправления из него. Сколько километров проходит теплоход за весь рейс?

Выполнение этого задания – около 53%. Не дали ответа 8% участников экзамена, выполнявших это задание.

Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия задачи: почти 16% участников нашли расстояние между пунктами отправки и стоянки, допущено множество вычислительных ошибок. Около 10% показали непонимание самого процесса движения по реке – собственную скорость теплохода умножали на время движения.

Задание 11.

Два велосипедиста одновременно отправились в 108-километровый пробег. Первый ехал со скоростью, на 3 км/ч большей, чем скорость второго, и прибыл к финишу на 3 часа раньше второго. Найдите скорость велосипедиста, пришедшего к финишу первым. Ответ дайте в км/ч.

Комментарий. Значительное количество участников экзамена указали в ответе скорость не первого, а второго велосипедиста, которую, вероятно, многие приняли «за икс» руководствуясь старым правилом считать переменным в уравнении меньшую из неизвестных величин. Ошибка в отсутствии последнего этапа решения.

Задание 11.

Велосипедист выехал с постоянной скоростью из города А в город В, расстояние между которыми равно 128 км. На следующий день он отправился обратно со скоростью на 8 км/ч больше прежней. По дороге он сделал остановку на 8 часов. В результате он затратил на обратный путь столько же времени, сколько на путь из А в В. Найдите скорость велосипедиста на пути из В в А. Ответ дайте в км/ч.

Комментарий. Около 10% участников указали в ответе скорость при движении из А в В. Невнимательность – наиболее трудно искоренимая проблема на экзамене.

Общие рекомендации. От ошибок по невнимательности спасает только перепроверка ответов как заключительная и обязательная часть экзамена. Следует говорить школьникам, что проверку ответа не нужно делать сразу после решения задачи – инертность мышления приведет к тому, что ошибка будет сделана вторично. Наиболее эффективный путь – проверка ответов перед тем, как сдать работу или по окончании определенного этапа (части, группы заданий и т.п.). Обязательно следует проверять задачу «на здравый смысл». Обнаружив при повторном чтении, что спрашивалась скорость на обратном пути, которая на 8 км/ч выше вчерашней, школьник заметит, что ответ 8 неверен, ибо это означало бы, что вчера велосипедист ехал со скоростью 0 км/ч.

Задание 12. Найдите точку минимума функции

Средний процент выполнения – 49.87%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки: умение вычислять производные элементарных функций, умение исследовать функции на монотонность, находить наибольшее и наименьшее значения функций.

Основные ошибки – неумение находить производную сложной функции, незнание и неуверенное применение алгоритма нахождения наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на отрезке.

Результаты выполнения задания 12 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	76,07	95,74

Задание 12. Найдите точку минимума функции $y = x^2 - 28x + 96 \cdot \ln x + 31$

Выполнение этого задания – около 35%. Не дали ответа около 10% участников экзамена, выполнявших это задание.

Типичные ошибки связаны в первую очередь с невнимательным чтением условия задачи или непониманием алгоритма исследования функции с помощью производной: почти 7% участников в ответе записали точку максимума. Около 5% участников продемонстрировали неумение находить производную логарифмической функции.

Задание 12.

Найдите точку максимума функции $y = 6 + 15x - 2x^{\frac{3}{2}}$.

Комментарий. Вероятно, сделав замену $y = \sqrt{x}$ при решении уравнения $15 - 3\sqrt{x} = 0$, многие забыли вернуться к переменной x. В прежние годы наиболее массовой ошибкой в подобных заданиях было указание в ответе значения функции в точке максимума. Количество таких ошибок существенно снизилось.

Рекомендация. Данную ошибку, вероятно, следует расценивать, как ошибку по невниманию. Минимизация числа ошибок по невнимательности – каждодневный труд учителя: устный счет, проверочные работы, математические диктанты и другие формы.

Задание 12

Найдите точку максимума функции $y = 6 + 12x - x\sqrt{x}$.

Комментарий. Массовые неверные ответы 6 и 12 являются попыткой «угадывания», приводя в ответе числа из условия. Ответ 0 мог получиться в результате замены $\sqrt{x} = y$ без дальнейшего исследования найденных двух точек.

Рекомендации. Важно отметить, что процент выполнения этой задачи ниже, чем предыдущей - при решении задачи, с записью $x^{3/2}$ участники экзамена ошибались при нахождении производной реже чем при записи в условии $x\sqrt{x}$. На этот аспект следует обратить серьезное внимание как при итоговом повторении и при обучении вычислению производных.

Задание 13. Решите уравнение… Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку….

Средний процент выполнения – 40,44%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки:

а) Умение решать тригонометрические уравнения.

б) Умение производить отбор корней уравнений. Умение использовать графический метод для отбора корней уравнений. Умение пользоваться тригонометрическим кругом. Умение строить график функции и пользоваться построенным графиком функции для отбора корней уравнения.

Основные ошибки:

- ошибки при использовании формулы приведения;
- ошибки при решении квадратного уравнения;
- незнание формул решения простейших тригонометрических уравнений;
- неверный отбор корней тригонометрического уравнения на данном отрезке.

Основной проблемой выполнения первого пункта оказалось незнание формул приведения. При выполнении второго пункта участники экзамена часто демонстрировали небрежность при отборе корней с помощью тригонометрической окружности или в методе перебора.

Результаты выполнения задания 13 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	74,23	100

Задание 13. а) Решите уравнение $9\cdot 81^{\cos x}-28\cdot 9^{\cos x}+3=0$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$

Ненулевые баллы за это задание получили около 26% участников экзамена; максимальный балл – около 20%.

Основной проблемой выполнения первого пункта оказалось неумение вводить новую переменную (ошибка в свойствах степеней), незнание формул решения простейшего тригонометрического уравнения. При выполнении второго пункта участники экзамена часто демонстрировали небрежность при отборе корней с помощью тригонометрической окружности или неумение отбирать корни.

13) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3}\sin x$

$-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x + 3 = 0$

Пусть $\sin x = t$, тогда

$-2t^2 + \sqrt{3}t + 3 = 0$

$D = b^2 - 4ac = (\sqrt{3})^2 - 4\cdot(-2)\cdot 3 = 3 + 24 = 27$

$t = \frac{-\sqrt{3} \pm 3\sqrt{3}}{-4}$ $\quad t_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\quad t_2 = \sqrt{3}$

Значит, $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ или $\sin x = \sqrt{3}$

1) $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$x_1 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$

$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z$

2) $\sin x = \sqrt{3}$ – нет решений, т.к. $-1 \le \sin x \le 1$, а $|\sqrt{3}| > 1$

б) Найдем корни уравнения, принадлежащие отрезку $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$

1) $[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}]$

$-3\pi \le -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \le -\frac{3\pi}{2}$

$-3 \le -\frac{1}{3} + 2k \le -\frac{3}{2}$

$-3 + \frac{1}{3} \le 2k \le -\frac{3}{2} + \frac{1}{3}$

$-\frac{8}{3} \le 2k \le -\frac{7}{6}$

$-\frac{16}{2\cdot 6} \le k \le -\frac{7}{12}$

$-\frac{16}{12} \le k \le -\frac{7}{12}$

$-1\frac{1}{3} \le k \le -\frac{7}{12}$, т.к. $k \in Z$, то $k = -1$

Если $k = -1$, то $x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3} - \frac{3\pi\cdot 2}{3} = -\frac{6\pi+\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$

2) $-3\pi \le \frac{4\pi}{3} + 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2}$

$-3\pi - \frac{4\pi}{3} \le 2\pi n \le -\frac{3\pi}{2} - \frac{4\pi}{3}$

$-\frac{13\pi}{3} \le 2\pi n \le -\frac{17\pi}{6}$

$-\frac{13}{6} \le n \le -\frac{17}{12}$

$-\frac{26}{12} \le n \le -\frac{17}{12}$

$-2\frac{1}{6} \le n \le -\frac{17}{12} = -1\frac{5}{12}, n \in Z$

$n = -2$

Если $n = -2$, то $x = \frac{4\pi}{3} - 4\pi = -\frac{8\pi}{3}$

Ответ: а) $-\frac{\pi}{3} + 2\pi k$; $\frac{4\pi}{3} + 2\pi n$; $k \in Z, n \in Z$

б) $-\frac{8\pi}{3}$; $-\frac{7\pi}{3}$

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

1 3) а) $\cos 2x + 2 = \sqrt{3}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$

$\cos 2x + 2 = \sqrt{3} \cdot (-\sin x)$!

$1 - 2\sin^2 x + 2 = -\sqrt{3} \cdot \sin x$

$-2\sin^2 x + 3 + \sqrt{3}\sin x = 0$

Пусть $\sin x = y$

Тогда

$-2y^2 + 3 + \sqrt{3}\,y = 0$

$D = \sqrt{3 - 4 \cdot 3 \cdot (-2)} = \sqrt{27} > 0$ 2 корня

$y_1 = \frac{-\sqrt{3} + \sqrt{27}}{-4} = \frac{-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}}{-4} = \frac{2\sqrt{3}}{-4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$y_2 = \frac{-\sqrt{3} - \sqrt{27}}{-4} = \frac{-4\sqrt{3}}{-4} = \sqrt{3}$

Обратно $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad$ $\sin x = \sqrt{3}$

$x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n \quad n \in Z$ $\quad$ нет решен

$\sin x \in [-$

б)

При $n = 0$

$x = -\frac{\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -1$

$x = \frac{\pi}{3} - \pi = -\frac{2\pi}{3} \notin \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -2$

$x = -\frac{\pi}{3} - 2\pi = -\frac{7\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

При $n = -3$

$x = \frac{\pi}{3} - 3\pi = -\frac{8\pi}{3} \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$

Ответ: а) $x = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{3}\right) + \pi n \quad n \in Z$

б) $-\frac{8\pi}{3}; -\frac{7\pi}{3}$

Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, но отбор корней нельзя назвать обоснованным, так как перебор остановлен на корне, принадлежащем отрезку. Типичный пример выставления 1 балла.

№13.

а) $\cos 2x + 0{,}5 = \cos^2 x$

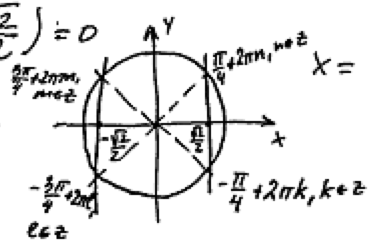
$2\cos^2 x - 1 + 0{,}5 - \cos^2 x = 0$

$\cos^2 x - \frac{1}{2} = 0$

$\left(\cos x - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 0$

$\left(\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$

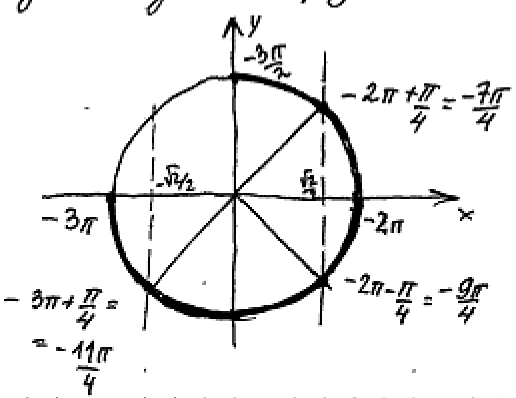
1. $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$
2. $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Rightarrow$



$x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$

а) Ответ: $\pm\frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in Z$.

б) $x \in \left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$. Для отбора корней построим единичную окружность.



б) Ответ: $-\frac{11\pi}{4};\ -\frac{9\pi}{4};\ -\frac{7\pi}{4}$.

Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах.

!!!

Необходимо обратить внимание учеников, что отбор корней можно проводить различными способами, главное, чтобы это отвечало требованию критерия “обоснованно”

C1 *а)* Решите уравнение $\cos 2x = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

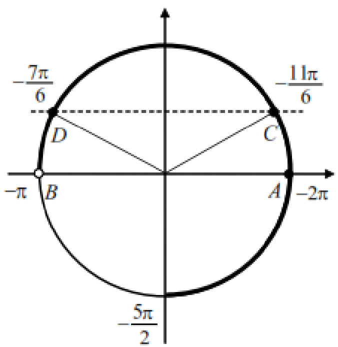
Решение.

а) Так как $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$, $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$, то $1 - 2\sin^2 x = 1 - \sin x$,

$2\sin^2 x - \sin x = 0$, $\sin x\left(\sin x - \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

Корни уравнения: $x = \pi n$, $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) Корни уравнения $\sin x = 0$ изображаются точками A и B, а корни уравнения $\sin x = \dfrac{1}{2}$ — точками C и D, промежуток $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ изображается жирной дугой (см. рис.). В указанном промежутке содержатся три корня уравнения: -2π, $-2\pi + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{11\pi}{6}$ и $-\pi - \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{7\pi}{6}$.



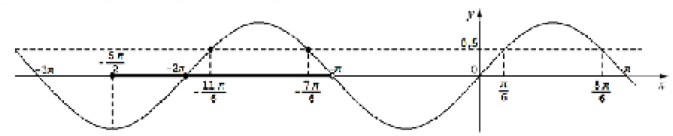
Ответ: *а)* πn, $(-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $n \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{Z}$.

б) $-2\pi, -\dfrac{11\pi}{6}, -\dfrac{7\pi}{6}$.

Другие решения пункта б).

б) Корни, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$, отберем по графику $y = \sin x$. Прямая $y = 0$ (ось Ox) пересекает график в единственной точке $(-2\pi; 0)$, абсцисса которой принадлежит промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Прямая $y = \dfrac{1}{2}$ пересекает график ровно в двух точках, абсциссы которых принадлежат $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ (см. рис.). Так как период функции $y = \sin x$ равен 2π, то эти абсциссы равны, соответственно, $\dfrac{\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{11\pi}{6}$ и $\dfrac{5\pi}{6} - 2\pi = -\dfrac{7\pi}{6}$.



В промежутке $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ содержатся три корня: $-2\pi, -\dfrac{11\pi}{6}, -\dfrac{7\pi}{6}$.

б) Пусть $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Подставляя $n = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, получаем $x = \ldots -3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$. Промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ принадлежит только $x = -2\pi$.

Пусть $x = (-1)^k \dfrac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Подставляя $k = \ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots$, получаем:

$x = \ldots\left(-\dfrac{1}{6} - 3\right)\pi, \left(\dfrac{1}{6} - 2\right)\pi, \left(-\dfrac{1}{6} - 1\right)\pi, \dfrac{\pi}{6}, \left(-\dfrac{1}{6} + 1\right)\pi, \left(\dfrac{1}{6} + 2\right)\pi, \ldots$.

Промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ принадлежат только $x = -\dfrac{11\pi}{6}$, $x = -\dfrac{7\pi}{6}$.

Промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$ принадлежат корни: $-2\pi, -\dfrac{11\pi}{6}, -\dfrac{7\pi}{6}$.

б) Отберем корни, принадлежащие промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$.

Пусть $x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $-\dfrac{5\pi}{2} \le \pi n < -\pi \Leftrightarrow -\dfrac{5}{2} \le n \le -1 \Leftrightarrow n = -2$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\dfrac{5\pi}{2}; -\pi\right)$: $x = -2\pi$.

Пусть $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $-\frac{5\pi}{2} \le \frac{\pi}{6} + 2\pi n < -\pi \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < n \le -\frac{7}{12} \Leftrightarrow n = -1$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$: $x = -\frac{11\pi}{6}$.

Пусть $x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in \mathbb{Z}$.

Тогда $-\frac{5\pi}{2} \le \frac{5\pi}{6} + 2\pi n < -\pi \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \le n < -\frac{11}{12} \Leftrightarrow n = -1$.

Корень, принадлежащий промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$: $x = -\frac{7\pi}{6}$.

Промежутку $\left[-\frac{5\pi}{2};-\pi\right)$ принадлежат корни: $-2\pi, -\frac{11\pi}{6}, -\frac{7\pi}{6}$.

13 а) Решите уравнение

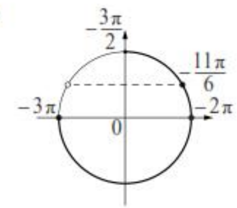
$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos 2x=\sqrt{3}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.

Решение. а) Запишем исходное уравнение в виде:
$\sin x+\sqrt{3}\cos x+1-2\sin^2 x=\sqrt{3}\cos x+1$; $\sin x-2\sin^2 x=0$; $\sin x\cdot(2\sin x-1)=0$.

Значит, $\sin x=0$, откуда $x=\pi k$, $k\in\mathbb{Z}$, или $\sin x=\frac{1}{2}$, откуда $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$, или $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$.

б) С помощью числовой окружности отберём корни, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi;-\frac{3\pi}{2}\right]$.



Получим числа: -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Ответ: а) πk, $k\in\mathbb{Z}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$;
$\frac{5\pi}{6}+2\pi m$, $m\in\mathbb{Z}$;
б) -3π; -2π; $-\frac{11\pi}{6}$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а*, ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	*2*

!!!

Во все предыдущие годы в задании № 13 были , как правило, использованы формулы приведения, формулы двойного угла, способ группировки . А в 2018 году был пример, в котором была использованы формулы суммы и разности углов

Задание 14. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания AB равна 6, а боковое ребро SA равно 7. На рёбрах AB и SC отмечены точки K и M соответственно, причём ….. . Плоскость α содержит прямую KM и параллельна прямой BC.

а) Докажите, что плоскость α параллельна прямой SA.

б) Найдите угол между плоскостями α и SBC.

Средний процент выполнения – 5,75%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки:

а) умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами.

б) умение решать задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов, площадей, объемов).

в) умение использовать при решении стереометрических задач планиметрические факты и методы.

Основные ошибки:

- неумение анализировать пространственные конфигурации, использовать известные факты и теоремы,
- вычислительные ошибки,
- некачественно выполненный чертеж, который не помогает в решении, а лишь затрудняет его.

Основной проблемой оказалось выполнение второго пункта. При выполнении этого пункта участники допускали большое количество разного рода ошибок при построении чертежа. Участник экзамена демонстрировали неумение доказывать утверждения, непонимание взаимосвязи между элементами геометрической конструкции, ошибки в теоретических фактах, логические ошибки (подмена утверждения, которое следует доказать, на известный факт).

Результаты выполнения задания 14 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	4,75	51,06

14 Сечением прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью α, содержащей прямую BD_1 и параллельной прямой AC, является ромб.

а) Докажите, что грань $ABCD$ — квадрат.

б) Найдите угол между плоскостями α и BCC_1, если $AA_1 = 6$, $AB = 4$.

Ненулевые баллы за эту задачу в 2018 году получили около 10% участников экзамена.

Основной проблемой оказалось выполнение первого пункта. Участники экзамена часто демонстрировали неумение доказывать, непонимание взаимосвязи элементов геометрической конструкции, часто ошибались в теоретических фактах. Много встречается разного рода логических ошибок, например: «предположим, что точки лежат в одной плоскости…» При выполнении второго пункта участники нередко демонстрировали незнание отношений объемов многогранников. Особо следует отметить большое количество разного рода ошибок, допущенных участниками при построении чертежа.

Задание 15. Решите неравенство ….

Средний процент выполнения – 19,45%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки:

- Умение решать рациональные и логарифмические неравенства.
- Умение использовать обобщенный метод интервалов для решения неравенств

Основные ошибки:

– неумение решать логарифмические и дробно-рациональные неравенства,

– плохое знание свойств логарифмической функции и свойств неравенств,

– слабые навыки в использовании метода интервалов при решении неравенств,

– арифметические ошибки.

Очень много ошибок допущено участниками при нахождении ОДЗ. Типичной ошибкой была ошибка при решении дробно-рационального неравенства (забыт знаменатель). Следует отметить небрежность, присутствующую во многих работах, при изображении множеств на координатной прямой.

Результаты выполнения задания 15 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	29,91	91,49

Задание 15. Решите неравенство $\dfrac{\log_4(64x)}{\log_4 x-3}+\dfrac{\log_4 x-3}{\log_4(64x)}\geq\dfrac{\log_4 x^4+16}{\log_4^2 x-9}$

Ненулевые баллы в 2018 году за это задание получили около 8,5% участников экзамена.

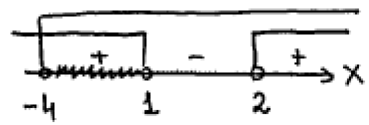
Типичные ошибки связаны с невнимательным чтением математической записи неравенства, непониманием алгоритма решения совокупностей и систем логарифмических неравенств. Очень много ошибок допущено участниками экзамена при решении дробно-рационального неравенства (забыт знаменатель). Следует отметить небрежность, которая была во многих работах, при изображении множеств на координатной прямой.

№15.

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3(x^2-3x+2) - \log_3(x+4)$$

$$\log_3(5-5x) \geq \log_3\left(\frac{x^2-3x+2}{x+4}\right)$$

ОДЗ: $\begin{cases} 5-5x>0 \\ x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \\ x+4>0 \end{cases} \begin{cases} x<1 \\ (x-2)(x-1)>0 \\ x>-4 \end{cases}$



т.к. $3>1 \Rightarrow$

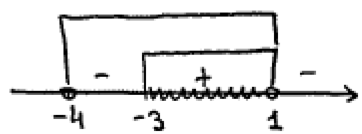
$$5-5x \geq \frac{x^2-3x+2}{x+4}$$

$$\frac{5(1-x)(x+4)+(x-2)(1-x)}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{(1-x)(5(x+4)+(x-2))}{x+4} \geq 0$$

$$\frac{(1-x)(6x+18)}{x+4} \geq 0 \quad \Big| :6$$

$$\frac{(1-x)(x+3)}{x+4} \geq 0$$



<u>Ответ</u>: $x \in [-3; 1)$.

- !!!!

Слова типа “ ОДЗ”“ООН” писать можно, только очень грамотно и аккуратно их использовать, в логике всего примера.

Задание 16. Точка О — центр вписанной в треугольник АВС окружности. Прямая ВО вторично пересекает описанную около этого треугольника окружность в точке Р.

а) Докажите, что ОР=СР .

б) Найдите радиус описанной около треугольника АВС окружности, если расстояние от точки Р до прямой АС равно 18, АВС=….

Средний процент выполнения – 1,38%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки:

-умение выполнять действия с геометрическими фигурами, координатами и векторами;

-умение решать планиметрические задачи на нахождение геометрических величин (длин, углов площадей).

Основные ошибки:

– неумение анализировать геометрическую конфигурацию,

- незнание теоремы о биссектрисе угла; теоремы о касательных, проведенных из одной точки к окружности;

– арифметические ошибки.

Типичные ошибки связаны с неверным пониманием логики построения доказательства. При выполнении второго пункта участники экзамена не считали нужным доказывать геометрические факты, используемые в решении. Особо следует отметить большое количество ошибок допущенных участниками при построении чертежа.

Результаты выполнения задания 16 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	0,20	20,57

Задание 16. Точка E — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. На стороне AB взяли точку K так, что прямые CK и AE параллельны. Отрезки CK и BE пересекаются в точке O.

а) Докажите, что $CO = KO$.

б) Найдите отношение оснований трапеции BC и AD, если площадь треугольника BCK составляет $\frac{9}{100}$ площади трапеции $ABCD$.

Выполнение этого задания – около 2%.

Типичные ошибки связаны в первую очередь с неверным пониманием логики построения доказательства; например, доказательство начинается так: «Пусть точка О является серединой отрезка СК…» При выполнении второго пункта участники допускали ошибки в отношении площадей подобных фигур или не считали нужным доказывать геометрические факты, используемые в решение. Особо следует отметить большое количество, допущенных участниками при построении чертежа.

Задание 17. 15-го января планируется взять кредит в банке на 49 месяцев. Условия его возврата таковы: — 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 1% по сравнению с концом предыдущего месяца; — со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга; — 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Какую сумму следует взять в кредит, чтобы общая сумма выплат после полного его погашения равнялась 2 млн рублей? (Считайте, что округления при вычислении платежей не производятся.)

Средний процент выполнения – 15,64%

Уровень -повышенный.

Проверяемые умения и навыки: умение моделировать и исследовать реальные ситуации на языке алгебры, составлять уравнения и неравенства по условию задачи, умение решать простейшие алгебраические уравнения и неравенства, умение использовать приобретенные знания в практической деятельности и повседневной жизни.

Основные ошибки:

- построение неверной модели, т.е. модели, не соответствующей условию задачи;
- вычислительные ошибки;
- отсутствие доказательств заявленных утверждений.

Результаты выполнения задания 17 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	21,47	97,16

Задание 17. В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Если ежегодно выплачивать по 58 564 рубля, то кредит будет полностью погашен за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 106 964 рубля, то кредит будет полностью погашен за 2 года. Найдите r.

Ненулевые баллы за это задание получили около 2%.

Типичные ошибки связаны в первую очередь с неверным составлением модели задачи (непонимание взаимосвязи величин) и вычислительными ошибками. Многие без всяких обоснований писали сразу формулу (не всегда имеющую отношение к задаче) или пытались решить задачу подбором. Видимо, многие участники экзамена считают, что решать задачу не обязательно, достаточно каким-то образом получить ответ.

№17.

Дано:

Кредит на 39 мес. r% – ставка банка. Каждый месяц долг должен уменьшаться на одну и ту же сумму. Σ выплат $= 1{,}2S$

r – ?

Решение:

$\frac{r}{100} = k$

месяц.	выплата	остаток
1	$kS + \frac{S}{39}$	$\frac{38}{39}S$
2	$kS \cdot \frac{38}{39} + \frac{S}{39}$	$\frac{37}{39}S$
.	.	.
38	$kS \cdot \frac{2}{39} + \frac{S}{39}$	$\frac{S}{39}$
39	$kS \cdot \frac{1}{39} + \frac{S}{39}$	0

Σ выплат: $S + kS\underbrace{\left(1 + \frac{38}{39} + \frac{37}{39} + \dots + \frac{1}{39}\right)}_{S_n} = 1{,}2S$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{1 + 1/39}{2} \cdot 39 = \frac{40 \cdot 39}{39 \cdot 2} = 20$$

$S + kS \cdot 20 = 1{,}2S \quad | : S$

$1 + 20k = 1{,}2$

$20k = 0{,}2$

$k = 0{,}01 \Rightarrow r = 100k = 1\ (\%)$

Ответ: $r = 1\%$.

Обоснованно получен верный ответ.

17. Пусть $\left(1+\frac{r}{100}\right)=x$

		1 ~~второй~~ способ	2 способ
Январь	2021	$5x$	$5x$
июль	2021	$5x-58564$	$5x-106964$
январь	2022	$5x^2-58564x$	$5x^2-106964x$
июль	2022	$5x^2-58564x-58564$	$5x^2-106964x-\cancel{1096}\ 106964$
январь	2023	$5x^3-58564x^2-58564x$	0
июль	2023	$5x^3-58564x^2-58564x-58564$	0
январь	2024	$5x^4-58564x^3-58564x^2-58564x$	0
июль	2024	$5x^4-58564x^3-58564x^2-58564x-58564$	0

$$\begin{cases} 5x^2-106964x-106964=0 \\ 5x^4-58564x^3-58564x^2-58564x-58564=0 \end{cases}$$

1) $S=\frac{106964}{x}+\frac{106964}{x^2}$

2) $S=\frac{58564}{x}+\frac{58564}{x^2}+\frac{58564}{x^3}+\frac{58564}{x^4}$

$$\frac{106964}{x}+\frac{106964}{x^2}=\frac{58564}{x}+\frac{58564}{x^2}+\frac{58564}{x^3}+\frac{58564}{x^4}$$

$$\frac{48400}{x}+\frac{48400}{x^2}-\frac{58564}{x^3}-\frac{58564}{x^4}=0 \quad |\cdot x^4$$

$$48400x^3+48400x^2-58564x-58564=0$$

$$48400x^2(x+1)-58564(x+1)=0$$

$$(x+1)(48400x^2-58564)=0$$

$x=-1$, не подх. по усл.

$$48400x^2=58564$$

$$x=\frac{242}{200}$$

~~...~~ 3: $\left(1+\frac{r}{100}\right)=\frac{242}{200}$

$r=10$

Ответ: 10%.

Обоснованно получен верный ответ.

Задание 18. Найдите все значения а, при каждом из которых уравнение …… имеет ровно два различных корня.

Средний процент выполнения – 1,44%

Уровень -высокий.

Проверяемые умения и навыки: умение решать иррациональные уравнения, используя свойства функций и их графиков.

Основные ошибки:

- непонимание логики задачи и плохой анализ условия;
- отсутствие полноценного исследования ситуации, предлагаемой в условии;
- неумение делать необходимые логические обоснования и выводы;
- отсутствие навыков построения аналитических рассуждений;
- ошибки при составлении ограничений на параметр и искомую величину;
- приобретение посторонних решений или потеря решений;
- неверное построение графиков функций при использовании графического метода решения;
- вычислительные ошибки.

Результаты выполнения задания 18 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	1,15	14,89

По сравнению с 2018 годом уровень сложности этого задания не изменился.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых система неравенств

$$\begin{cases} ax \geq 2, \\ \sqrt{x-1} > a, \\ 3x \leq 2a+11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение на отрезке $[3; 4]$.

Ненулевые баллы за это задание получили около 1% участников экзамена.

Основной проблемой оказалось неумелое применение графического метода решения, который, как показали работы, недостаточно сформирован у участников экзамена. Об этом свидетельствует массовое отсутствие описаний сделанных чертежей и конструкций, а также значительное число работ, в которых ответ на поставленный вопрос отсутствует, несмотря на обилие всевозможных построений.

Задание 19. Последовательность a_n состоит из 100 натуральных чисел. Каждый следующий член последовательности, начиная со второго, либо вдвое меньше предыдущего, либо больше него на 90.

а) Может ли такая последовательность быть образована ровно четырьмя различными числами?

б) Чему может быть равно a_{100} , если ….. ?

в) Какое наименьшее значение может принимать самое большое из чисел в такой последовательности?.

Средний процент выполнения – 4,28%

Уровень -высокий.

Проверяемые умения и навыки: умение строить и исследовать простейшие математические модели реальных ситуаций на языке алгебры, умение составлять уравнения и неравенства по условию задачи, умение проводить доказательные рассуждения при решении задач, оценивать логическую правильность.

Основные ошибки:

- непонимание логики задачи и плохой анализ условия;
- отсутствие полноценного исследования ситуации, предлагаемой в условии;
- неумение делать необходимые логические обоснования и выводы;
- - отсутствие навыков построения доказательных рассуждений и их выражение в словесной форме;
- - вычислительные ошибки.

Первый пункт выполнили только те участники экзамена, кто внимательно прочитал условие, понял закономерности, исследовал несколько примеров и обобщил результат. По прежнему встречались работы в которых на вопрос «может ли» следовал короткий ответ «да» или «нет» без обоснований.

Результаты выполнения задания 19 участниками экзамена в группах с разными уровнями подготовки приведены в таблице:

Набрано тестовых баллов	0-26 баллов	61-80 баллов	81-100 баллов
% числа участников, справившихся с заданием	0	5,14	25,00

По сравнению с 2018 годом уровень сложности этого задания не изменился.

19 На доске написано несколько различных натуральных чисел, произведение любых двух из которых больше 40 и меньше 100.

а) Может ли на доске быть 5 чисел?

б) Может ли на доске быть 6 чисел?

в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел на доске, если их четыре?

Ненулевые баллы за это задание получили около 3% участников экзамена

Первый пункт выполнили те, кто внимательно прочитал условие, понял закономерности, исследовал несколько примеров и обобщил результат. Массовая ошибка в том, что на вопрос «может ли» следует короткий ответ «да» или «нет» без обоснований.

На доске написано 30 натуральных чисел (числа могут повторяться), каждое из которых либо зелёного, либо красного цвета. Каждое зелёное число кратно 3, а каждое красное число кратно 7. При этом все зелёные числа различны и все красные различны (какое-то зелёное число может равняться какому-то красному числу).

а) Может ли сумма написанных чисел быть меньше $1395=3+6+\ldots+90$, если все числа на доске кратны 3?

б) Может ли ровно одно число на доске быть красным, если сумма написанных чисел равна 1067?

в) Какое наименьшее количество красных чисел может быть на доске, если сумма написанных чисел равна 1067?

а) Да., пример:

$\underbrace{3; 6; 9; 12; 15; 18, 21, \ldots 87}_{\text{зеленые}}$; $\underset{\text{красное}}{21}$

Сумма чисел $\overset{1326}{=} < 1395.$, ~~т.к. 90 заменили на 21.~~

б) Найдем минимально возможную сумму с одним красным числом.

Т.к. сумма → min ⇒ красное число = 7.,

зеленые – 3; 6; 9; 12; 15; 18. . . ., 87.

Σ чисел = 1305 + 7 = 1312 > 1067 ⇒ не может

Ответ: нет.

в) Пусть $f(n)$ – функция, значение которой равно минимально возможной сумме при данном n. где n – кол-во красных чисел.

$$f(n) = 7\cdot\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2}\right) + 3\cdot\left(\frac{(30-n)(31-n)}{2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(7n^2+7n + 3n^2 \pm \underset{183n}{3\cdot 61n} + \underset{2790}{3\cdot 30\cdot 31}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(10n^2 - 176n + 2790\right) = 5n^2 - 88n + 1395.$$

найдем минимальное n ($n \in \mathbb{Z}^+$), такое что $f(n) \le 1067$.

$$5n^2 - 88n + 1395 \le 1067$$

$$5n^2 - 88n + 328 \le 0$$

$$\frac{D}{4} = 44^2 - 328\cdot 5 = 1936 - 1640 = 296.$$

$$n \in \left[\frac{44-\sqrt{296}}{5}; \frac{44+\sqrt{296}}{5}\right] \Rightarrow n = 6.$$

$$f(6) = 7\cdot\frac{6\cdot 7}{2} + 3\cdot\frac{24\cdot 25}{2} = 3(49 + 12\cdot 25) = 3\cdot 349 = 1047.$$

$f(5) = 1380 > 1067 \Rightarrow$ для 5 – неверно.

Ответ: 6 – наименьшее кол-во красных.

пример:

7; 14; 21; 28; 35; 56.

3; 6; 9; 12; . . . . . 69; 78; ~~81~~

В 2020 г. не планируется изменений в структуре и содержании КИМ ЕГЭ по математике профильного и базового уровней.

Методическую помощь учителям и обучающимся при подготовке к ЕГЭ могут оказать материалы с сайта ФИПИ (www.fipi.ru):

- документы, определяющие структуру и содержание КИМ ЕГЭ 2020 г.;
- открытый банк заданий ЕГЭ;
- методические рекомендации на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ прошлых лет (2015–2018 гг.);
- журнал «Педагогические измерения»;
- Youtube-канал Рособрнадзора (видеоконсультации по подготовке к ЕГЭ 2016 – 2019 гг.), материалы сайта ФИПИ (http://fipi.ru/ege-i-gve-11/daydzhest-ege).

Полезная информация: Ресурсы для подготовки к ЕГЭ

Alexlarin.net

- решу егэ
- mathus.ru
- егэмаксимум.ру по математике
- Издательство «Легион»
- Все пособия издательства «Экзамен»

- Ресурсы для подготовки к ЕГЭ